

伝熱学・熱流体力学における『のどの小骨』を流し込む

*One-Point Lectures to Pour Away "A Tiny Bone Stuck in One's Throat"*

*Concerning Heat Transfer and Thermofluid Dynamics*

吉田 英生 (京都大学)

*Hideo YOSHIDA (Kyoto University)*

2003年10月9日、本特集の執筆者の方々に以下のようなメールで、お願いさせていただいた。

“伝熱学や熱流体力学の教科書で触れられることが少ないけれども関連現象の本質を理解する上で重要な事項、あるいはどの教科書でも通り一遍の記述はなされるものの今一つしっくりこない事項、これらはいつまで経ってもすっきりしない『のどの小骨』となってひっかかっている場合が多いのではないのでしょうか。もちろん、その程度には少なからぬ個人差があるとは考えられますが、本特集ではその小骨を流し込めるような One-Point 解説をお願いしたいと存じます。(中略)分量は内容によって異なると予想しますので、先生に最もおまとめやすい長さにお任せいたします。”

上記の依頼文では、単に一般の読者を対象とした解説をお願いしたような表現になっている。しかし、後で思い返してみると、依頼した背景に無意識的であったことに十分言及できていないことに気付いた。それは、現代人なかでも若人の置かれた状況についてである。

科学技術の世界では、『最先端』『最前線』『次世代』のことが求められがちで、しかもその変化速度は Alvin Toffler が既に 30 年以上も前に Future Shock の中で指摘したように、日増しに早くなっている。人間が一生の間に受容できる量は本質的には変わらないと思われるが、自らが一員をつとめ自らが駆動力の一部となる Society からの要求は限りなく増大していく。Society としては、社会しかり、学会しかり。

知的遺産を世代から世代に相続し半永久的に存

在する(特定ではなく広義の)学会では、個人は旅人として勉強しながら通り過ぎていく。駆け出しの旅人、つまり学生は、当面のゴールに向けて焦点を合わせて焦るため、スタート点付近では駆け足になりがちである。そのために、足がからまり転倒という不測の事態もおこってしまう。また、たとえ焦る気持ちはなくとも、学問の進歩に伴って新しく学ぶ事項が増えるために、やむを得ず勉強対象から切り落とされてしまう事項も少なくない。しかし、その切り落とされた事項の中には、今すぐ必要ではないかもしれないが、これから学問を深めていく過程では不可欠な要素が含まれている場合もあるだろう。

本特集では、上記のような視点から 8 テーマを取り上げ、各テーマに造詣の深い先生方に解説をお願いした。(筆者の場合は、責任上、担当した。)冒頭に引用した執筆依頼文章中に明記したわけではなかったが、各原稿を拝見して、後段で述べたような視点から若い旅人を念頭において道案内をしていただいた内容ともなっていることを確認できたことは有り難かった。

前号では、伝熱シンポジウムのあり方が議論になっていた。確かに、生身の人間が議論を熱く戦わせるシンポジウムは、学会の活力源として最も重要と思う。それに対し、このような特集企画は、先に生まれ、あるいは先にその道を歩む者から、後に生まれ、あるいは後にその道を歩む者への、慈愛に満ちた道しるべとなり、伝熱学会の貴重なアーカイブの一部となることを願うものである。

最後に、ご多用中にもかかわらず、依頼に応じていただき、しかも短期間で原稿をご準備いただいた執筆者の方々にお礼申し上げる次第である。

ある角度からはとことん似ていて、  
ある角度からは似て非なる球と円柱

*Sphere and Cylinder Which Are Thoroughly Similar from Some Angles,  
But Are Falsely Similar from Other Angles*

吉田 英生 (京都大学)

*Hideo YOSHIDA (Kyoto University)*

1. はじめに球あるいは円柱ありき

『円柱』という語がタイトルに含まれる数少ない書の一つ『生きものは円柱形』(本川達雄著)[1]によれば、生きものは多種多様であるが、その形を一言でいうと前記タイトルのものであるという。その円柱形は球形から進化した。すなわち、『生命の進化の過程においては、まず体が細胞1個だけからできている小さな単細胞生物が出現し』たはずで、その細胞膜は油の膜だから『表面張力によって表面積がもっとも小さい形である球になったと思われ』る。しかし、生物にとって死活問題というべき表面積を確保しつつ、強度的にも丈夫な構造となると、自ずと円柱形に発展したという。

このように生きものにとって根元的ともいうべき形状である球と円柱は、生きもの以外の自然現象においても、人工物の構成要素としても、最も重要な形状であると言えるだろう。地球を初めとする星、固体粒子、液滴、気泡、線、管など、中実と中空何れの場合もあり、さらに具体的に考えるなら枚挙にいとまがない。

われわれを取り巻く世界が球と円柱で満ち満ちているということは、伝熱学あるいは熱流体力学の対象としても、球と円柱は極めて重要ということにつながる。実際に、両者はそのような学問的扱いを受けてきた。ただし、筆者が察するところ、一般には、両者は質的にはほとんど同じで、量的にのみ若干異なるのだらうと認識されているのではないだろうか。確かに一見すると、両者は非常に似ているが、よくよく考えてみると本質的な差異もありそうである。ちょうど、球と円柱とを並べてシルエットを映し出したとき、ある角度からは共に円形で見分けがつかないが、ある角度からは円形と帯状で似ても似つかぬというように。そこで、本稿では、球と円柱に関する事項を系統的に対比してみて、とことん似ている場合と、似て非なる場合とを、整理してみたい。

2. 本文に先だって

本稿では、球と円柱とを常に対にして議論していく。ただし、内容の性格によって、球と円柱の登場順序が変わることがある。また、記号はできるだけ統一するようにしたが、図は種々の参考文献からの転載であるので、同じ変数記号が異なる意味で用いられることがある。そのような場合は、局所的に定義しなおした。

想像するに、球と円柱のような素朴な?話題は、本誌で今後も滅多に取り上げられることがないだろう。そこで、球と円柱との対比という本来の目的からは逸れるが、個々に興味深いと思われる話題を、この機会を利用して8ポイントの小さい文字で本文中に挿入させていただいた。

本稿では話題が多岐にわたるので、最初に構成を説明しておきたい。以下の枠内に見出しをまとめた。

1. まず流れ場から入り、温度場に進む。
2. 流れ場では、 $Re$  数が増大した極限と考えられる非粘性流れ = ポテンシャル流 (Euler 方程式) から出発して、粘性流 (Navier-Stokes 方程式) へと議論を進め、最後は  $Re$  数が1付近の遅い流れを扱う。
3. 温度場では、直前の遅い流れの相方として、まず定常熱伝導から入る。その後は3.2に対して4.2, 3.3に対して4.3がある。

3. 流れ場

- 3.1 非粘性流れ
- 3.2 粘性がある場合のよどみ点近傍の流れ
- 3.3 粘性がある場合の全体の流れ
- 3.4 遅い流れ

4. 温度場

- 4.1 定常熱伝導
- 4.2 強制対流でのよどみ点近傍の熱伝達
- 4.3 強制対流での全体の熱伝達

### 3. 流れ場 [2-11]

#### 3.1 非粘性流れ [4-8, 10, 11]

速度  $U_\infty$  の一様流におかれた半径  $R$  の円柱まわりの流れの複素速度ポテンシャル  $f$  は速度ポテンシャル  $\phi$  と流れ関数  $\psi$  を用いて次式のようになる。

$$f(z) = \phi + i\psi = U_\infty \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) z \quad (1)$$

一方、速度  $U_\infty$  の一様流におかれた半径  $R$  の球まわりの速度ポテンシャル  $\phi$  と Stokes の流れ関数  $\psi$  (軸対称の場合の流れ関数には “Stokes の” という接頭語が付くが、以後は省略する) は

$$\phi = U_\infty \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3}\right) r \cos \theta \quad (2)$$

$$\psi = \frac{1}{2} U_\infty \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) r^2 \sin^2 \theta \quad (3)$$

となる。

表面に沿う速度  $U$  の絶対値を、前方よどみ点からの距離  $x (=R\theta)$  で表すと、

円柱：

$$|U| = 2U_\infty \sin \theta = 2U_\infty \sin\left(\frac{x}{R}\right) \approx 2U_\infty \frac{x}{R} \quad (4)$$

球：

$$|U| = \frac{3}{2} U_\infty \sin \theta = \frac{3}{2} U_\infty \sin\left(\frac{x}{R}\right) \approx \frac{3}{2} U_\infty \frac{x}{R} \quad (5)$$

となる。円柱の方が球よりも加速の度合いが大きいのは、いうまでもなく、円柱では2次元的にしか流れが回り込めないのに対し、球では3次元的に回り込めるからである。

上記の非粘性流れでは、円柱、球とも、流れは前後で対称になるため圧力抵抗もないが、非定常運動をする場合には、周囲の液体を押し回すことに対応する付加質量 (added mass) あるいは仮想質量 (virtual mass) (Hinze [12] は virtual, “added” mass と丁寧に表現している) の抵抗が作用する。単位長さ当たりの円柱と球の体積を、ともに  $Vol$  とし、周囲流体の密度を  $\rho$  とすると、付加質量は以下のようになる。

円柱：  $\pi a^2 \rho = Vol \cdot \rho \quad (6)$

球：  $\frac{2}{3} \pi a^3 \rho = \frac{1}{2} Vol \cdot \rho \quad (7)$

筆者の周囲の学生にときどき尋ねてみて実感していることとして、付加質量に関して認識している人は多くない。しかし極めて身近な問題として、水泳の力学 (腕、足、および身体全体の非定常運動) を考える上で、付加質量は忘れてはならない重要な因子である。この分野で徹底した文献調査を行ったわけではないが、現時点で入手した情報の中で水泳の力学について勉強する手がかりになる論文として、文献[13-17]などを紹介する。

#### 3.2 粘性がある場合のよどみ点近傍の流れ [2, 4, 6]

一様流が円柱あるいは球にぶつかって分岐する前方よどみ点近傍の流れは、実際の工学的応用を考える上で重要である。

まず Fig. 1 に示す 2 次元 (円柱) のよどみ点近傍の主流と速度境界層について考えてみよう。

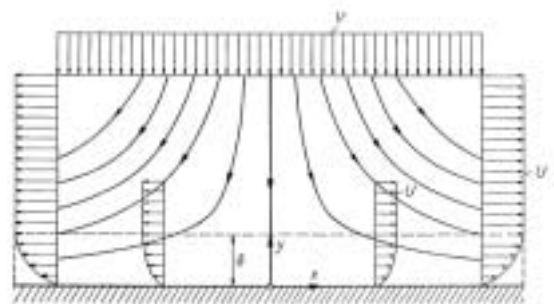


Fig. 1 Stagnation-point flow and boundary layer [2]

2次元の場合の主流は、中心線より片側だけに着目すると、90度の角を曲がる流れと同じだから、 $a$  を正の定数として、速度ポテンシャルは

$$\phi = \frac{a}{2} r^2 \cos 2\theta = \frac{a}{2} r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \frac{a}{2} (x^2 - y^2) \quad (8)$$

のように表され (ここで  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ),

$$U = \frac{\partial \phi}{\partial x} = ax \quad (9), \quad V = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -ay \quad (10)$$

となる。式(9)に示されるよどみ点からの線形的な加速は、式(4)で既にわかっていたことであり、式(9)右辺の定数  $a$  を加速率と呼ぶことにする。式(10)からわかるように、この値は上流からよどみ点に向けての減速率でもあり、その意味で、よどみ点の前後で流れは対称的である。加速率  $a$  を円柱の場合と結びつけると以下のようになる。

$$a = \frac{2U_\infty}{R} \quad (11)$$

ここで、加速率について、さらに考えてみよう。Fig. 1 に示す 2次元直角座標に対するよどみ点流

れでは、無限幅の平板に無限幅の流体が衝突する。したがって、流体の速度の絶対値は、無限上流および無限下流でやはり無限となり、代表長さも代表速度も規定できない。そのかわり、よどみ点からの加速率  $a$  が代表速度と代表長さの比として場を代表する値となる。一方、円柱の場合は、無限流体中に有限寸法の円柱が置かれるために、式(11)のように、境界層外側のポテンシャル流の加速率が一様流の速度と円柱半径で決定された。

よどみ点近傍の境界層では、下流方向への発達と主流の線形的な加速が相殺する結果、Fig. 1 に点線で示されるように厚さが一定になることが知られている。また、よどみ点流れは、楔形物体により、主流が

$$U \propto x^m \quad (12)$$

と加速される平板境界層（いわゆる Falkner-Skan 方程式）で、 $m = 1$  の場合としても取り扱うことができる。

次に、Fig. 1 を軸対称（球）のよどみ点近傍とみなして考えてみよう。球のよどみ点まわりの式(5)から、軸対称でも主流は一定の加速をすることが確認できる。そこで、主流速度  $U = ax$  を連続の式（平板に沿う方向を  $x$ 、垂直方向を  $y$  とする）

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}(xU) + \frac{\partial}{\partial y}(V) = 0 \quad (13)$$

に代入すると、平板に垂直方向の主流速度  $V$  は

$$V = -2ay \quad (14)$$

となる。（別の方法として、球まわりの速度ポテンシャルの式(2)を  $r$  で微分しても等価な結果は得られるし、文献[5] p. 353 にあるように流れ関数

$$\Psi = -ax^2y \quad (15)$$

を最初から導入してもよい。）すなわち、よどみ点に接近する主流も線形的に減速する点は2次元の場合と同様であるが、減速率を基準とすると、加速率の大きさは半分になる。このことは、平板に衝突した流れが全周方向に回り込むことに対応している。なお軸対称の場合も、境界層厚さが一定であることが知られている。

### 3.3 粘性がある場合の全体の流れ [2-4,6-9,11,18]

実際の球と円柱のまわりの全体の流れについて考えてみよう。抵抗係数  $C_D$  を Fig. 2 と Fig. 3 に示す。横軸は直径  $d (= 2R)$  と一様流の速度  $V$  (前出の

$U_\infty$ ) に基づく  $Re$  数である。円柱も球も  $Re$  数が小さい1近傍で  $Re$  数に逆比例して  $C_D$  が減少すること、さらに  $Re$  数が増加するとほぼ一定値をとるが、 $Re$  数が  $10^5 \sim 10^6$  の間で急変すること、何れの点でも極めて似た特性であることがわかる。

$Re$  数が高い領域における抵抗係数の複雑な変化は、球あるいは円柱まわりの速度が減速することに伴う逆圧力こう配により、前方よどみ点から発達してきた境界層がはく離することに起因する。そして、抵抗係数の急減する領域は、層流境界層が乱流境界層に遷移するために、乱流の強い混合作用ではく離しにくくなる（はく離点が後方に移動する）ことによっている。

このような球と円柱がまともにぶつかりあうのが野球である。硬式野球のボールは、規則により直径 74 mm (重さ 145 g) 前後で、投手の投げる速度は時速 150 km (42 m/s) 程度、したがってボールまわりの  $Re = 1.9 \times 10^5$ 。一方、バットの一番太い部分は直径 65 mm 前後で、スイングの速度は時速 110 km (31 m/s) 程度、したがって  $Re = 1.3 \times 10^5$ 。ボールもバットも、それぞれ Fig. 2 と Fig. 3 で抵抗係数が急変する  $Re$  数より若干小さめである。ボールの場合には、縫い目があって乱流への遷移を促進する傾向があることや、回転による効果も重畳することも考慮すれば、抵抗の激変領域にかかる。

1987-89 年に The National League's Official Physicist でもあった Yale 大学物理学科の Robert Adair 教授が著した The Physics of Baseball [19] は、野球ファンでなくても興味のない書である。（<http://www.yaledailynews.com/article.asp?AID=2386>）

この書に刺激されてインターネットでブラウズするうちに Washington 大学物理学科の Jeffrey Wilkes 教授の下にある <http://www.phys.washington.edu/~wilkes/post/temp/phys208/index.html>、および、このホームページを通じて行き当たった The NASA Glenn Research Center の Learning Technologies Project [http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/freesoftware\\_page.htm](http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/freesoftware_page.htm) では、Baseball Applet (Fig. 4) というソフトをダウンロードしてカーブボールのシミュレーションをすることもできる。このソフトに限らず、The NASA Glenn Research Center のホームページは教育の面からも非常によくできていて、どなたもその世界の中にどんどん引き込まれていくのではないかと思う。

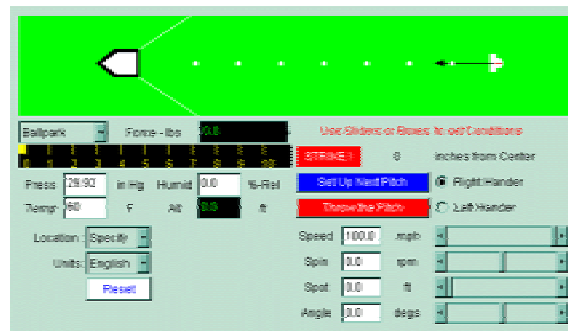


Fig. 4 Baseball applet by the NASA Glenn research center

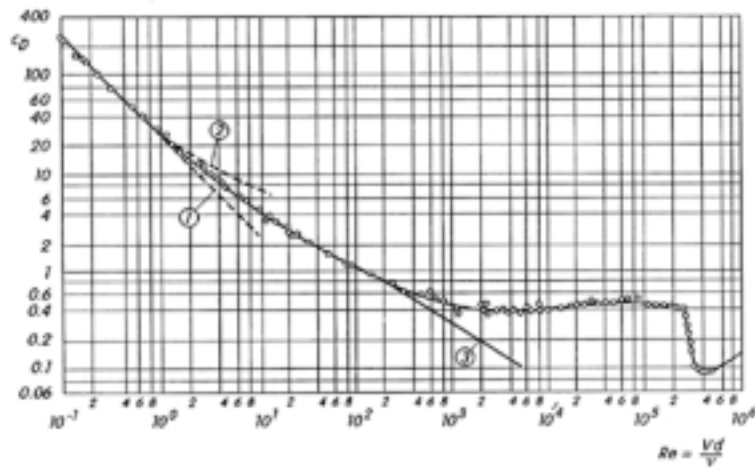


Fig. 2 Dependence of the drag coefficient of spheres on the Reynolds number [2]

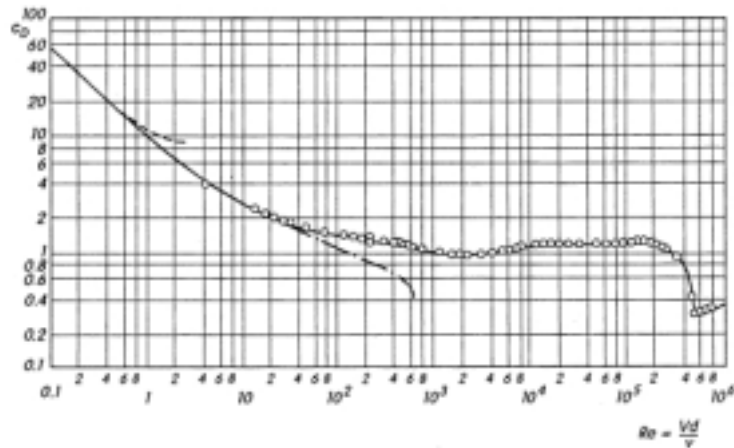


Fig. 3 Dependence of the drag coefficient of cylinders on the Reynolds number [2]

円柱からはく離れた流れでは，Kármán 渦と呼ばれる渦が交互に生成されることは，いうまでもないであろう．純粋な Kármán 渦は  $80 < Re < 300$  程度で見られ，さらに  $Re \sim 10^5$  辺りまでは，明確な規則性はやや失われつつも一定の周波数での渦生成が持続する．

Kármán 自身が述懐するように、『しかし私は、この渦を発見したのは私であると主張しません．それは、私の生れるずっと前から知られていたのです．私がこの渦を見た一番古い絵は、イタリアのボローニャの教会にあるもので、セント・クリストファが幼いキリストを抱いて、流れを渡っているところなのですが、聖徒の裸の足のうしろに、二列の交代の渦が描かれていました。』[20]（最近、この絵は福岡工業大学の溝田武人氏により発見され、日本流体力学学会の会誌『ながれ』や Nature にも紹介された[21]．）

円柱の下流に生成される Kármán 渦があまりにも有名なことに比べると、球の下流に生成される

渦については、目に触れる機会がほとんどないと思う．そういう筆者も今回の執筆に際して参考文献[22-24]を真剣に探すまで、見たことがなかった．Fig. 5 に、入手した範囲では比較的新しく明確と思われる可視化画像を紹介する．言葉で表現するのは難しいが、 $Re$  数の増加に伴い、螺旋的な挙動から特定方向の渦が生成され、それらがさらに螺旋的な不安定に移行していくと言えようか．

円柱と球の下流での渦の発達には、本質的な相違がある．Navier-Stokes 方程式をベクトル表示し、その回転を取ると、次式のような渦度方程式が得られる．

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{w} \quad (16)$$

ここで、 $\mathbf{v}$  は速度ベクトル、 $\mathbf{w}$  は渦度ベクトルであり、右辺第 1 項は渦度の伸張に関係するので渦

(乱流)を考えるとときには、一番大事な項の一つといっても過言ではない。渦は伸びると断面積が減少して強くなり、縮むと断面積が増加して弱くなることに対応しているためである。(フィギュアスケートでの回転の加速と減速を思い出していただきたい。) 球の後流あるいは円形ノズルからの噴流のように、平均的には軸対称性を有する流れでは、ドーナツ状の渦がまず生成されることができる。後流も噴流も下流に向かうにつれ拡散のために幅が広がっていくため、ドーナツ状の渦は平均流により伸張される。一方、円柱の後流や2次元ノズルからの噴流で生成されるスパン方向の渦は平均流による伸張はない。

このことを式(16)で確認する。x, y 平面での2次元流(z方向の速度成分がなく、かつz方向に一樣)の場合、右辺第1項は次式のように0になる。

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \left( w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial}{\partial y} + w_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v} \\
 &= \left( 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y} + w_z \cdot 0 \right) (v_x, v_y, 0) = (0, 0, 0)
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

一方、(x, y, θ)座標(x:半径方向, y:軸方向, θ:周方向)で軸対称の場合、右辺第1項は次式のようになり、0にはならない。

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \left( w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial}{\partial y} + w_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \mathbf{v} \\
 &= \left( w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial}{\partial y} + w_\theta \cdot 0 \right) (v_x, v_y, 0) \\
 &= \left[ \left( w_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \left( w_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right), 0 \right]
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

乱流モデルの開発の歴史において、2次元噴流で経験定数を調整されたモデルでは、軸対称噴流の発達を正確に予測できないということが問題にされた。その理由として、上述の渦の伸張により乱流エネルギーの散逸率が変化することが指摘された [25]。

なお、式(17)で、2次元流の場合に右辺第1項が0になるというのは、あくまでも平均流による寄与を意味していて、実際の流れでは乱流(変動)成分による寄与は当然ながらある。しかし、数値計算で変動成分を含めて完全な2次元計算を行うような場合には、その可能性を排除してしまうので、実際の乱流とはかけ離れた結果となることを覚悟する必要がある。

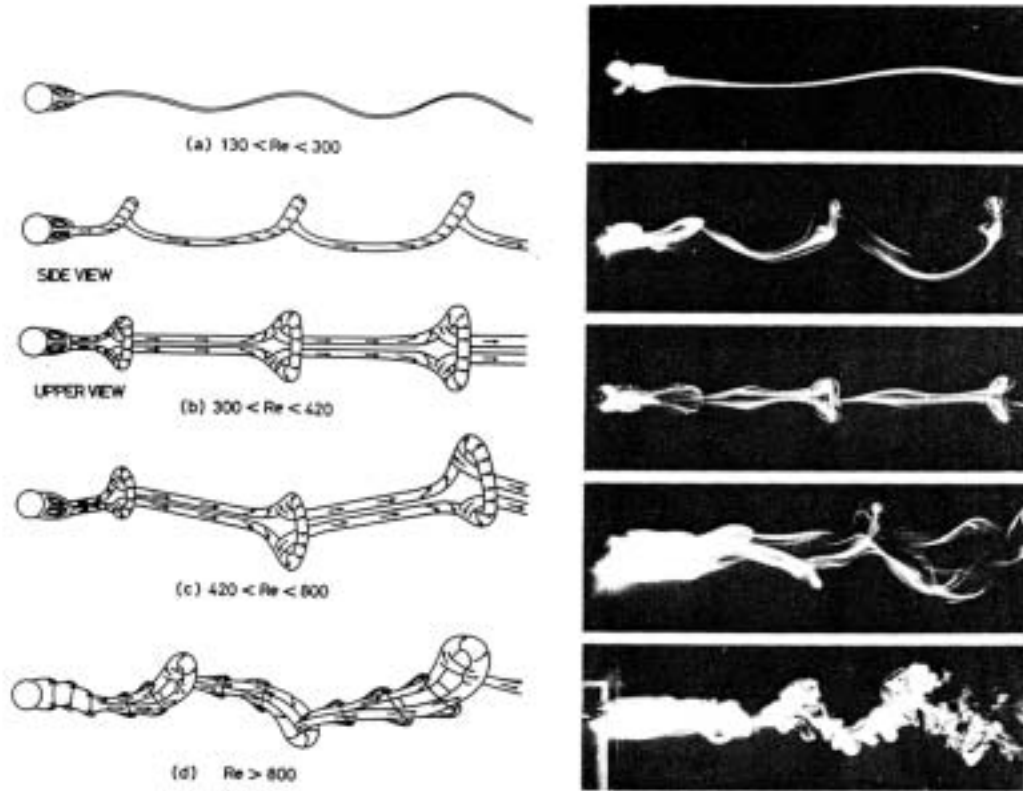


Fig. 5 Patterns of vortex shedding in wake at each region [22]

## 3.4 遅い流れ [4-8, 10, 11]

本章では,  $Re$  数が小さいときの定常流を考えよう.  $Re$  数は, 慣性項と粘性項の比であるから,  $Re$  数が小さいときに, 扱いのやっかいな非線形の慣性項を無視して (粘性係数  $\mu$ , 圧力  $p$  とする),

$$\mu \Delta v = \text{grad} p \quad (19)$$

のように粘性項と圧力項との釣合を考えることは自然なことであり, これを Stokes 近似(1851) [26] という.

この近似に基づいて一様流中に置かれた球まわりの流れを求めると (導出は結構めんどうである), 流れ関数  $\Psi$ , 速度, 圧力は

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2} U_\infty \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right) r^2 \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{2} U_\infty \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{R}{r} \right) (r - R)^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (20)$$

$$v_r = U_\infty \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad (21)$$

$$v_\theta = -U_\infty \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{1}{4} \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta \quad (22)$$

$$p = -\frac{3}{2} \frac{\mu U_\infty R}{r^2} \cos \theta \quad (23)$$

となる. 球表面に沿って, 上記の速度分布に基づく摩擦応力と圧力を積分すると, 抵抗  $D$  が求まる.

$$\begin{aligned} D &= 2\pi \mu R U_\infty (\text{圧力抵抗}) + 4\pi \mu R U_\infty (\text{摩擦抵抗}) \\ &= 6\pi \mu R U_\infty \end{aligned} \quad (24)$$

したがって,

$$C_D \equiv \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \cdot \pi R^2} = \frac{24}{Re} \quad (25)$$

これが Stokes の抵抗法則であり, Fig. 2 中の点線に対応する.

Stokes 近似では方程式は線形なので, ポテンシャル流の場合と同様に重ね合わせが可能である. そこで, 上記の流れに速度  $-U_\infty$  の一様流を重ね合わせると静止流体中を  $-U_\infty$  で運動する球による流れが得られる. このときの流れ関数  $\Psi$  は次式のようなになる (文献[4] p. 231, 文献[7] p. 302).

$$\Psi = -U_\infty \left( \frac{3R}{4r} - \frac{1}{4} \frac{R^3}{r^3} \right) r^2 \sin^2 \theta \quad (26)$$

ここまで来ると, 次なるステップは円柱の場合にも Stokes 近似を適用してみることだが, 結論から先に述べると, 円柱のような 2 次元物体に対しては, 円柱表面の境界条件と無限遠の境界条件の両方を満たす解は存在しない. このことは Stokes のパラドックスと呼ばれ, 60 年後に慣性項を線形化した Oseen 近似(1910) [27] により解決されることになる. Stokes のパラドックスに関する説明は文献[4-8, 10]に種々なされているが, 何れも難解であるのはやむを得ないと思われる. (本質的には, 文献[5] p. 334にあるように, Stokes 源が発散するか否かという問題である.) その中で, Batchelor [4] による解説は, 数式による対比があるため比較的具体性があり理解しやすい (理解したような気になれる) と思われるので, 本稿でも採用する.

静止流体中を球あるいは円柱が運動する場合を考える. 球について, 式(26)で示した流れ関数を, 出発点に立ち返って求める場合, 特解が明らかに  $\sin^2 \theta$  に比例していることから

$$\Psi = U_\infty \sin^2 \theta \cdot f(r) \quad (27)$$

とおくと, 未知関数  $f$  に対する方程式は

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{2f}{r^2} = -\frac{C}{r} \quad (28)$$

となり, 一般解は

$$f(r) = -\frac{1}{2} Cr + Lr^{-1} + Mr^2 \quad (29)$$

である. 境界条件としては球表面と無限遠がある. ここで,  $L$  と  $M$  は渦なし運動に起因する項の係数であるので, 無限遠での境界条件を満たすためには  $M=0$  とおけばよく, 残りの  $C$  と  $L$  を適切に選べば球表面での境界条件を満たすことができる.

一方, 円柱の場合は, 特解が明らかに  $\sin \theta$  に比例していることから

$$\Psi = U_\infty \sin \theta \cdot f(r) \quad (30)$$

とおくと, 未知関数  $f$  に対する方程式は

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{f}{r^2} = -\frac{C}{r} \quad (31)$$

となり, 一般解は

$$f(r) = -\frac{1}{2} Cr \ln r + Lr + Mr^{-1} \quad (32)$$

である. ここで右辺第 1 項は不可欠な渦度に起因する項であるため ( $C=0$  とすることはできない) 無限遠で発散してしまう. すなわち, Stokes 近似

では、無限遠の境界条件を満たす解は存在しない。球と円柱の本質的な差異の一つといえよう。

ただし、このように表現してしまうと、Stokes 近似について以下のような二つの誤解を招く恐れがあるかもしれない。

1. Stokes 近似は、軸対称物体の場合には問題がないが、2次元物体の場合に問題が生じた。
2. Stokes 近似は、2次元物体の場合に全く無力である。

1 についての正しい理解は次のようである：円柱、球を問わず、物体から遠くはなれた場所では Stokes 近似は（境界条件は満足できても）妥当性を失い、球についてもっともらしい解が得られたのは幸運であった。（[5] p. 361, [7] p. 309）

2 についての正しい理解は次のようである：流れの領域が有限の場合 Stokes 近似により低  $Re$  数の流れは十分扱える。（[4] p. 245, [5] p. 334）実際、円柱の場合に、式(32)の問題点に目をつづって、円柱の抵抗を求め、Oseen 近似で得られた係数を導入すれば

$$C_D \equiv \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \cdot 2R} = \frac{8\pi}{Re \ln(7.406/Re)} \quad (33)$$

となり、Fig. 3 中の点線に対する漸近線になる。（[4] p. 246）

Stokes(1819. 8. 13 - 1903. 2. 1)は、碩学がひしめく Cambridge 大学でも別格の存在である。Table 1 に示すように、Lucas 教授職に、30 才から 84 才で亡くなるまで 54 年間もいた。

Table 1 The Lucasian professorship of mathematics at Cambridge University

(<http://www.math.ohio-state.edu/~nevai/547/lucasian.html>  
<http://www.hawking.org.uk/home/hindex.html> など)

| Professor              | Chair Dates | Specialty             |
|------------------------|-------------|-----------------------|
| Isaac Barrow           | 1664-1669   | Classics & Math.      |
| Sir Isaac Newton       | 1669-1702   | Math. & Physics       |
| William Whiston        | 1702-1710   | Math.                 |
| Nicolas Saunderson     | 1711-1739   | Math.                 |
| John Colson            | 1739-1760   | Math.                 |
| Edward Waring          | 1760-1798   | Math.                 |
| Isaac Milner           | 1798-1820   | Math. & Chemistry     |
| Robert Woodhouse       | 1820-1822   | Math.                 |
| Thomas Turton          | 1822-1826   | Math.                 |
| Sir George Airy        | 1826-1828   | Astronomy             |
| Charles Babbage        | 1828-1839   | Math. & Computing     |
| Joshua King            | 1839-1849   | Math.                 |
| Sir George Stokes      | 1849-1903   | Physics & Fluid Mech. |
| Sir Joseph Larmor      | 1903-1932   | Physics               |
| Paul Dirac             | 1932-1969   | Physics               |
| Sir M. James Lighthill | 1969-1980   | Fluid Mech.           |
| Stephen Hawking        | 1980-       | Theoretical Physics   |

#### 4. 温度場 [3, 9, 18, 28-34]

##### 4.1 定常熱伝導

前節で考えた  $Re$  数が小さい場合に対応して、流れがない熱伝導問題を考える。球のまわりの媒体の熱伝導率  $\lambda$  が一定とすると、基礎方程式は、温度  $T$  に対する球対称座標でのラプラシアン

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (34)$$

となる。同心の二つの球表面（添字 1 と 2）で温度が規定されるとき温度分布は

$$T = \frac{T_1 - T_2}{r \left[ (1/r_1) - (1/r_2) \right]} + \frac{(T_2/r_1) - (T_1/r_2)}{(1/r_1) - (1/r_2)} \quad (35)$$

であり、熱流束  $q_r$  は

$$q_r = \lambda \frac{T_1 - T_2}{r^2 \left[ (1/r_1) - (1/r_2) \right]} \quad (36)$$

となる。ここで外側の球面を無限遠に拡大した境界条件

$$\begin{aligned} r = r_1 = R: & \quad T = T_w \\ r = \infty: & \quad T = T_\infty \end{aligned} \quad (37)$$

を代入すると、球面状での熱流束は

$$q_r(R) = \lambda \frac{T_w - T_\infty}{R} \quad (38)$$

となり、直径 (=  $2R$ ) を代表長さとする  $Nu$  数は

$$Nu = \frac{q_r(R) 2R}{\lambda(T_w - T_\infty)} = 2 \quad (39)$$

となる。

一方、円柱対称座標では、ラプラシアンが

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (40)$$

のように  $r$  の 1 乗になるから、同心の二つの円柱表面（添字 1 と 2）で温度が規定されるとき温度分布は

$$T = -\frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} \ln r + \frac{T_1 \ln r_2 - T_2 \ln r_1}{\ln(r_2/r_1)} \quad (41)$$

となり、熱流束は

$$q_r = \lambda \frac{T_1 - T_2}{r \ln(r_2/r_1)} \quad (42)$$

となる。ここで、ここで外側の円柱面を無限遠に拡大した境界条件

$$\begin{aligned} r = r_1 = R: & \quad T = T_w \\ r = \infty: & \quad T = T_\infty \end{aligned} \quad (43)$$

を代入すると、円柱面状での熱流束は



$$q_r(r_1) = 0 \quad (44)$$

となる。もし円柱表面温度が周囲温度と異なる場合は、現象論的には定常解を持たないことになる。

このことは、前節でみた Stokes 近似を円柱に適用した場合の破綻と通じるものがあると言えないであろうか。もちろん両者の基礎方程式は異なるが、元をただすとラプラスアンでの  $r$  方向のペキが、球の場合には 2 乗であるのに対し円柱の場合には 1 乗であるため、積分の過程で対数  $\ln$  が現れることに起因している。物理的に端的に表現すると、3 次元的に拡散できるか、2 次元的にしか拡散できないかの差異であり、このことは 3.1 で述べたよどみ点まわりの加速率の大小にも共通している背景ともいえよう。

#### 4.2 強制対流でのよどみ点近傍の熱伝達

円柱でも球でも、前方よどみ点近傍では速度境界層の厚さが一定となることを、先に述べた  $Re$  数および  $Nu$  数の代表長さとして、よどみ点からの距離  $x$  をとると  $Pr$  数が 1 近傍の流体に対して、 $Nu$  数は次式のように近似される。[3, 9] (以下で  $\alpha$  は熱伝達率である。)

2 次元:

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = \frac{\alpha x}{\lambda \sqrt{Ux}} = \frac{\alpha x}{\lambda \sqrt{axx}} = \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\frac{v}{a}} = 0.570 Pr^{0.4} \quad (45)$$

軸対称:

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\frac{v}{a}} = 0.763 Pr^{0.4} \quad (46)$$

ここで、式(46)は式(45)から Mangler 変換[2, 3, 9]により  $\sqrt{3}$  の係数を乗じて求めた。Fig. 1 で速度境界層の厚さが一定であったのに対応して、温度境界層の厚さも一定となり、 $Nu$  数は加速率  $a$  の平方根に比例する。

$Pr$  数が 1 よりはるかに大きい場合には、 $Pr$  数の  $1/3$  乗に比例する形で、次式ようになる。

2 次元:

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\frac{v}{a}} = 0.491 Pr^{1/3} \quad (47)$$

軸対称:

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\frac{v}{a}} = 0.850 Pr^{1/3} \quad (48)$$

といっても、式(47)と式(48)は、筆者の知る限り文献中にはなかなか見当たらない。実は、式(48)は、筆者が修士 2 年生のとき、恩師の一人の土方邦夫先生に B4 の裏紙 10 枚を使って、誤差関数を援用して導出していただいたものだ。

このような境界層方程式に関する解析解の導出は、けっこう難しい。少なくとも筆者の場合、自力では絶対再導出不可能と思われたので、導出していただいた当日に清書し直した詳細なメモが残してある。もし必要な場合は以下のアドレスまでご連絡いただきたい (yoshida@mech.kyoto-u.ac.jp)。

なお、文献[28]に、手法は異なるが式(48)の右辺と同じ 0.850 の係数が報告されている。式(47)の係数は Mangler 逆変換により  $\sqrt{3}$  で除した結果である。

#### 4.3 強制対流での全体の熱伝達

空気流中における、円柱まわりの局所  $Nu$  数分布を Fig. 6 と Fig. 7 に、球まわりの局所  $Nu$  ( $Sh$ ) 数分布を Fig. 8 と Fig. 9 に示す。円柱も球も、 $Re$  数が低いときは前方の熱伝達率が大きい、 $Re$  数が増加するにつれ背面のはく離域で大きくなることわかる。(ただし、球の場合、全体に対する寄与は  $\cos\theta$  の重みを考える必要がある点に注意。)

これらの実験(数値計算)結果に基づいて提案されている平均  $Nu$  数の相関式では、球の場合には前述した純粋熱伝導の極限值 2 が定数項として陽に現れているが、円柱の場合にはそのような定数項がないことに注意されたい。

なお、主流に乱れがある場合の円柱あるいは球まわりの熱伝達に関しても、数多くの研究がなされてきた。特に、前方よどみ点付近では、Fig. 1 に示す流線から理解できるように、 $x$  軸方向の渦度が伸張を受けるため、 $y$  軸方向の乱れが選択的に増幅される。この結果、伝熱が促進されるという機構が付加されることが、多くの研究の動機となった。このことは、2 次元あるいは軸対称の衝突噴流による伝熱機構解明の研究とも共通することであり、同時に乱流モデルの高精度化に対する検証の場を提供したことを付記する。

#### 5. Stokes 没後 1 年のむすび

『のどの小骨を流し込む』という企画の言い出しっぺとしての責任上、不勉強ながら執筆者の一人となり、以前から自分の中で引っかかっていた球と円柱の関係について取り上げた。執筆当初は、似て非なる側面を沢山挙げられないかと目論んでいたが、結果的には、とことん似ている側面を再確認する部分が多くなってしまった。ただ、今まで漠然としか認識していなかった球と円柱の関係を

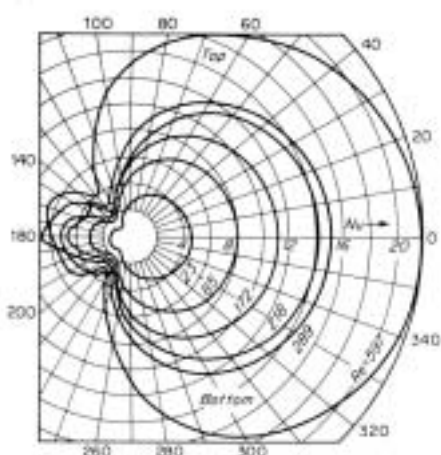


Fig. 6 Local Nusselt number around a cylinder in a uniform flow (low  $Re$  number) [18, 29, 31] (右側が前方)

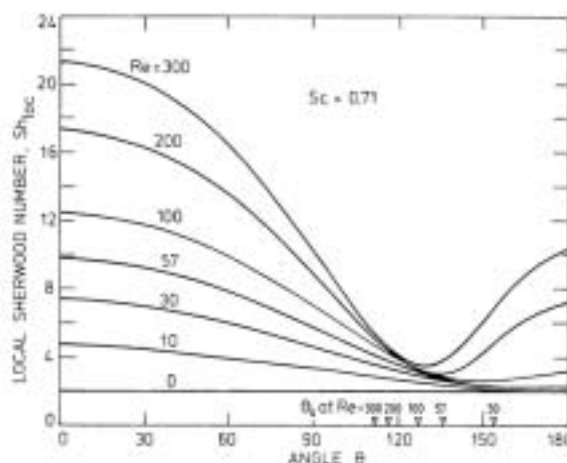


Fig. 8 Local Sherwood number around a sphere in a uniform flow (low  $Re$  number: calculation) [32, 34]

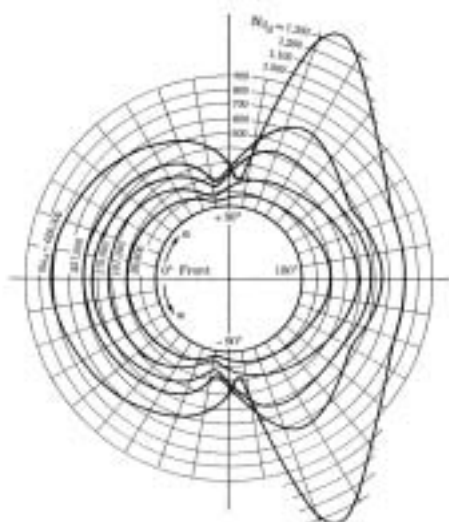


Fig. 7 Local Nusselt number around a cylinder in a uniform flow (high  $Re$  number) [18, 30, 31] (左側が前方)

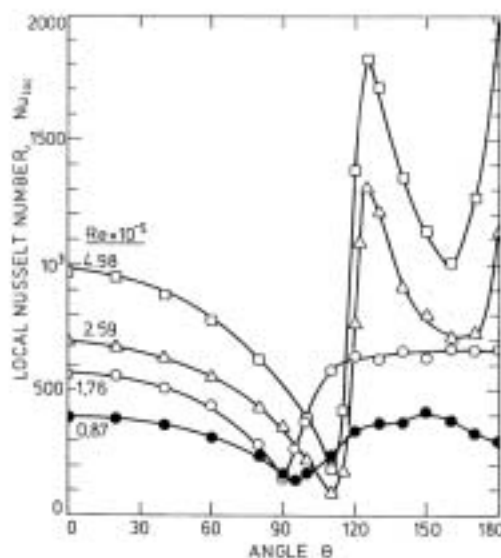


Fig. 9 Local Nusselt number around a sphere in a uniform flow (high  $Re$  number) [33, 34]

整理するよい機会にはなった。個人的には、ずっと見てみたいと思いながら調査を先延ばししていた、球の後流中に形成される渦を初めて確認できたのも嬉しかった。

できることなら、窒息しないぎりぎりのところで、正月のために買って来た餅をグイッと飲み込んで小骨を流し込みたかった。しかし、とりわけ Stokes のパラドックスに関する部分は、問題の深みに対して筆者の力量不足が決定的であり、七草粥を飲み込んだ程度と自覚している。この点は

心残りであるが、Stokes が生涯と Lucas 教授職を全うしたのが 1903 年で、没後 1 年の 2 3 年大晦日に、球と円柱に関する原稿をひとまず書き終えることができたことを幸いとしたい。

#### 謝 辞

本稿の締切直前に、限られた時間ではあったが、名古屋工業大学の長野靖尚先生と東京工業大学の宮内敏雄先生に、拙稿をご覧いただき貴重なコメントを多数いただいた。ここに記して謝意を表する次第である。

## 参考文献

- [1] 本川達雄, 生きものは円柱形, NHK 出版 (1998).
- [2] Schlichting, H. and Gersten, K., *Boundary-Layer Theory, 8th Revised and Enlarged Edition*, Springer (2000).
- [3] 甲藤好郎, 伝熱概論, 養賢堂 (1964).
- [4] バチェラー G. K. (橋本英典ほか 訳), 入門流体力学, 東京電機大学出版局 (1972).
- [5] 今井功, 流体力学 前編, 裳華房 (1973).
- [6] 森康夫, 土方邦夫, 流れと熱の工学 I, 共立出版 (1976).
- [7] 巽友正, 流体力学, 培風館 (1982).
- [8] 日野幹雄, 流体力学, 朝倉書店 (1992).
- [9] Kays, W. M. and Crawford, M. E., *Convective Heat Transfer, Third Edition*, McGraw-Hill (1993).
- [10] 木田重雄, 流体方程式の解き方入門, 共立出版 (1994).
- [11] 佐野理, 連続体の力学, 裳華房 (2000).
- [12] Hinze, J., *Turbulence*, 2nd ed., McGraw-Hill (1975) 463.
- [13] 田古里哲夫, 水泳競技の流れ学, 東京大学公開講座 スポーツ, 東京大学出版会 (1986), 155.
- [14] 宮下充正, 水泳バイオメカニクス研究の過去, 現在, 未来, 体育の科学 **48-11** (1998) 927, **48-12** (1998) 1015.
- [15] Klauck, J., Man's water resistance in accelerated motion: An experimental evaluation of the added mass concept, *Proc. of VIII Int. Sympo. on Biomechanics and Medicine in Swimming*, (1998) 83.
- [16] Toussaint, H. M., Biomechanics of propulsion and drag in front crawl swimming, (2002) [http://www.aptn.pt/artigos\\_tecnicos/Toussaint.2.pdf](http://www.aptn.pt/artigos_tecnicos/Toussaint.2.pdf)
- [17] マグリシオ, E. W. (野村武男, 田口正公 監訳), スイミング・イーブン・ファースター, ベースボール・マガジン社 (1999).
- [18] Zukauskas A. and Ziugzda J., *Heat Transfer of a Cylinder in Crossflow* (Edited by Hewitt, G. F.), Hemisphere (1985).
- [19] ロバート・アデア (中村和幸 訳), ベースボールの物理学, 紀伊国屋書店 (1996).
- [20] フォン・カルマン (谷一郎 訳), 飛行の理論, 岩波書店 (1956) 66, あるいは(野村安正 訳), 大空への挑戦 - 航空学の父 カルマン自伝 -, 森北出版 (1995).
- [21] 溝田武人, カルマン渦の安定配列計算にまつわるフレスコ画はこれか?, *ながれ* **18-6** (1999) 365, St Christopher and the vortex - A Kármán vortex in the wake of St Christopher's heels, *Nature* **404-6775** (2000) 226., <http://www.fit.ac.jp/~mizota/kenkyu/bologna/bologna.html>
- [22] Sakamoto, H. and Haniu, H., A study on vortex shedding from spheres in a uniform flow, *J. Fluids Eng.*, **112-4** (1990) 386.
- [23] Shirayama, S., Flow past a sphere: Topological transitions of the vorticity field, *AIAA J.*, **30-2** (1992) 349.
- [24] Dallmann, U., Gebing, H. and Vollmers, H., Unsteady three-dimensional separated flows around a sphere - Analysis of vortex chain formation, in *Bluff-Body Wakes, Dynamics and Instabilities*, IUTAM Sympo., Springer (1993) 27.
- [25] Pope, S. B., An explanation of the turbulent round-jet/plane-jet anomaly, *AIAA J.*, **16-3** (1978) 279.
- [26] Stokes, G. G., On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, *Trans. Cam. Phil. Soc.*, 9, Part II (1851) 8.
- [27] Oseen, C. W., Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik, *Arkiv Mat., Astron. och Fysik*, **6-29** (1910) 1.
- [28] Chin, D-T. and Tsang, C-H., Mass transfer to an impinging jet electrode, *J. Electrochem. Soc.*, **125-9** (1978) 1461.
- [29] Eckert, E. R. G. and Soehngen, E., Distribution of heat-transfer coefficients around circular cylinders in crossflow at Reynolds numbers from 20 to 500, *Trans. ASME*, (1952) 343.
- [30] Schmidt, E. and Wenner, K., Wärmeabgabe über den Umfang eines angeblasenen geheizten Zylinders, *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, **12** (1941) 65.
- [31] Eckert, E. R. G. and Drake, R. M. Jr., *Analysis of Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill (1972).
- [32] Woo, S.-W., Ph. D. Thesis, McMaster Univ.,

Hamilton, Ontario, (1971).

- [33] Xenakis, G., Amerman, A. E. and Michelson, R. W., Investigation of the heat-transfer characteristics of spheres in forced convection,

*Wright Air Dev. Cent. Tech. Rep.*, **53-117** (1953)  
<http://www.gl.iit.edu/wadc/>.

- [34] Clift, R., Grace, J. R. and Weber, M. E., *Bubbles, Drops, and Particles*, Academic Press (1978).
-